

Aufgaben zur e-Funktion

- 1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = 2x - 2x \cdot e^{1-x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ (Abitur 2000 All).
- 1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f und bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f . 
- 1.2 Zeigen Sie, dass gilt $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \cdot e^{1-x^2}) = 0$ und bestimmen Sie damit die Gleichung der Asymptote des Graphen der Funktion f . 
- 1.3 Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion f . 
(Mögliches Teilergebnis: $f''(x) = 4x \cdot (3 - 2x^2) \cdot e^{1-x^2}$)
- 1.4 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion f und geben Sie die Koordinaten seiner Wendepunkte an. 
- 1.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f mit Hilfe aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-2 \leq x \leq 2$. Berechnen Sie für die Zeichnung zusätzlich den Funktionswert $f(2)$, und tragen Sie auch die Asymptote des Graphen der Funktion f ein. 
Verwenden Sie für die Zeichnung eine eigene Seite mit dem Koordinatenursprung in der Seitenmitte und dem Maßstab 1 LE = 2cm.
- 2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$ (Abitur 2001 All).
- 2.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ und geben Sie Lage und Art der Nullstelle der Funktion f an. 
- 2.2 Bestimmen Sie für die Funktion f die maximalen Monotonieintervalle und geben Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes des Graphen der Funktion f an. 
- 2.3 Skizzieren Sie unter Berücksichtigung nur der bisher vorliegenden Ergebnisse den prinzipiellen Verlauf des Graphen von f . Geben Sie sodann die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = a$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ an. 
- 3 Gegeben ist die reelle Funktion $g(x) = e^{4-x} - 1$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$ (Abitur 2004 AI).
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $g(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$, berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion g mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion g . 

4.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{-x+1}$ in der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ (Abitur 2005 AI).

4.1 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$. 

4.2 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f keine relativen Extrempunkte, jedoch einen Terrassenpunkt und einen weiteren Wendepunkt aufweist. Bestimmen Sie auch die Koordinaten dieser Punkte. 

(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = (-x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-x+1}$)

4.3 Zeichnen Sie unter Verwendung schon bekannter Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graph der Funktion f für $-0,5 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 

Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1cm

5.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 2,25)e^{0,5x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.
 G_f sei der Graph der Funktion f .

5.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie die Koordinaten und Art der Extrempunkte von G_f . 

5.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f . 

5.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$. 

5.4 Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f der Funktion f im Bereich $-9 \leq x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein. 

6.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = 6x^2 e^{-2x+1}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.
 G_f sei der Graph der Funktion f .

6.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie die Koordinaten und Art der Extrempunkte von G_f . 

6.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f . 

6.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$. 

6.4 Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f der Funktion f in ein kartesisches Koordinatensystem ein. 

7.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = -e^{2x} + 4e^x$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

G_f sei der Graph der Funktion f .

7.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie die Koordinaten und Art der Extrempunkte von G_f . 

7.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f . 

7.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$. 

7.4 Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f der Funktion f in ein kartesisches Koordinatensystem ein. 

8.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = e^{-0,5x^2+x} - 1$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

G_f sei der Graph der Funktion f .

8.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie die Koordinaten und Art der Extrempunkte von G_f . 

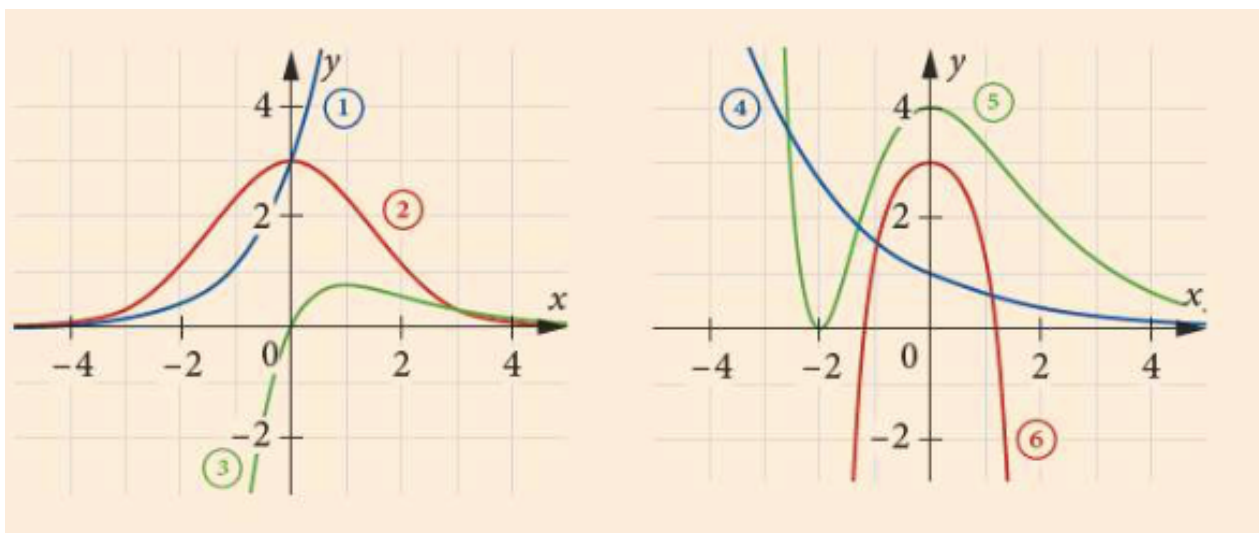
8.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f . 

8.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$. 

8.4 Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f der Funktion f im Bereich in ein kartesisches Koordinatensystem ein. 

9 Ordnen Sie der Funktionsgleichung den richtigen Graphen zu und begründen Sie Ihre Auswahl (ohne Hilfsmittel). ○

- a) $f(x) = 3e^x$ b) $f(x) = -e^{x^2} + 4$ c) $f(x) = 2xe^{-x}$
d) $f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$ e) $f(x) = e^{-0,5x}$ f) $3e^{-0,25x^2}$



10.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto e^{0,25x} - e^{-0,25x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet. (Abitur 2019 Teil 1)

10.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion g zum Koordinatensystem und geben Sie $\int_{-2}^2 g(x) dx$ an. ⓧ

10.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$. ⓧ

11.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^2 \cdot e^{-x}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. (Abitur 2019 Teil 2 All)

11.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion f an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$. ⓧ

11.2 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt, und damit die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von f . ⓧ

11.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1 \leq x \leq 6$ in ein geeignetes Koordinatensystem. ○
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

12.0 Zur Unterstützung von Gärprozessen, z.B. bei der Herstellung von Lebensmitteln, werden Hefen benötigt. Die Hefezellen wachsen in Behältern mit Nährlösung. Bei einer bestimmten Hefekultur verdoppelt sich die Anzahl der Hefezellen im Durchschnitt stündlich. Zu Beginn des Wachstumsprozesses wird Hefe mit der Masse 0,5 g in den Behälter eingebracht.

(Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)

12.1 Stellen Sie eine Wertetabelle auf, in der Sie die Hefemassen nach 0, 1, 2, 3 und 4 Stunden eintragen. ☐

12.2 Geben Sie einen Funktionsterm $H(t)$ an, der die Abhängigkeit der Hefemasse in Gramm von der Zeit t in Stunden beschreibt. ☒

13 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto e^x - 1$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Nullstelle von k und begründen Sie, dass k die Wertemenge $W_k =]-1; \infty[$ hat. (Abitur 2019 Nachtermin Teil 1) ☐

14.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2(x-2)^2 \cdot e^{-0,5x}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2019 Nachtermin Teil 2)

14.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$. ☒

14.2 Berechnen Sie jeweils die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f . Runden Sie die y -Werte gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen. ☒
(Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -(x^2 - 8x + 12) \cdot e^{-0,5x}$)

14.3 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $0 \leq x \leq 12$ mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm)
Begründen Sie mithilfe des Verlaufs von G_f , ohne weitere Rechnung, in welchen der angegebenen Intervalle sich jeweils eine Wendestelle befindet. ☐
 $I_1 =]0; 2[$; $I_2 =]2; 6[$; $I_3 =]6; 12[$

15.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (2x^2 - 4) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

(Abitur 2020 Teil 2 AI)

15.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen G_f bezüglich des

Koordinatensystems sowie das Verhalten der Funktionswerte von f für $|x| \rightarrow \infty$. 

15.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f

und geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an. 

(Teilergebnis: $f'(x) = (8x - 2x^3) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 - 1}$)

15.3 Stellen Sie die Gleichung der Tangente an G_f an der Stelle $x = 1$ in allgemeiner

Form auf. 

15.4 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f und zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von f für $-3 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 

Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 2 cm

15.5 Der Graph der Ableitungsfunktion von f und die x -Achse schließen im I. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems im Bereich $0 \leq x \leq 2$ ein endliches Flächenstück ein.

Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks auf zwei

Nachkommastellen gerundet. 

15.6 Der Graph G_f und die Koordinatenachsen schließen im IV. Quadranten ein endliches Flächenstück ein.

Schätzen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks geeignet ab. 

16.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto 2 - 5e^{-0,1x^2}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

(Abitur 2020 Teil 2 AII)

16.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen G_g bezüglich des

Koordinatensystems sowie das Verhalten der Funktionswerte von g für $|x| \rightarrow \infty$.

Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen G_g an. 

16.2 Berechnen Sie die Nullstellen von g . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. 

16.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_g .

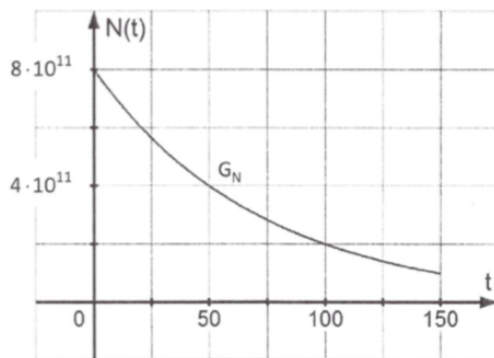
Begründen Sie, warum dieser absolut ist und geben Sie die Wertemenge W_g der Funktion g an. 

16.4 Stellen Sie die Gleichung der Tangente an G_g an der Stelle $x = 3$ in allgemeiner Form auf. 

16.5 Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_g können auch ohne Verwendung der Ableitungsfunktion bestimmt werden. Begründen Sie dies mithilfe bekannter Ergebnisse.
Verwenden Sie dabei die Tatsache, dass nur höchstens ein Extrempunkt von G_g existiert. 

16.6 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion g im Bereich $-7 \leq x \leq 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. 

17 Beim radioaktiven Zerfall nimmt die Anzahl $N(t)$ der in einer Probe vorhandenen radioaktiven Teilchen exponentiell mit der Zeit t ab. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des zur Funktion N zugehörigen Graphen G_N für $t \geq 0$.
Entnehmen Sie dem Diagramm geeignete Punkte und bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm von $N(t)$. (Abitur 2020 Nachtermin Teil 1) 



18.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto 16 \cdot (1 - e^{-0,8x}) + 4$ in der Definitionsmenge $D_g = [0; \infty[$.
(Abitur 2020 Nachtermin Teil 2)

18.1 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von g für $x \rightarrow \infty$ und erläutern Sie, was dieses Ergebnis für den Graphen der Funktion g bedeutet. 

18.2 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion g sowie die zugehörige Wertemenge W_g . 

18.3 Zeichnen Sie den Graphen G_g der Funktion g und die Gerade G_h mit $h: y = 20$ im Bereich $0 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. 
Maßstab: x-Achse: 1 LE = 1 cm; y-Achse: 4 LE = 1 cm

18.4 Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von $x \in D_g$ der vertikale Abstand zwischen dem Graphen G_g und der Geraden G_h aus Teilaufgabe 18.3 höchstens 0,5 beträgt. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. 

18.5 Die beiden Graphen G_g und G_h aus Teilaufgabe 18.3 schließen zusammen mit der y-Achse und der Geraden $x = 4$ ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. 

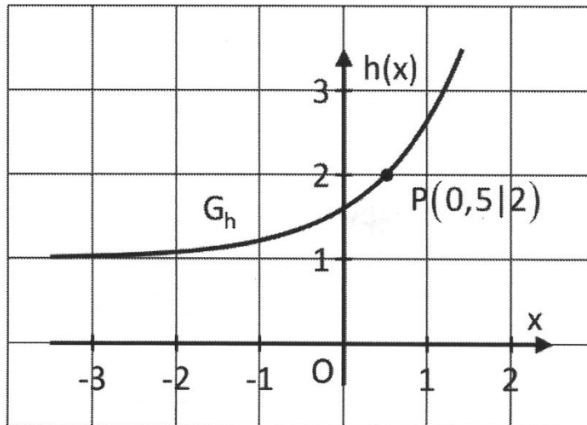
19.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2e^{\frac{1}{2}x+1} - 1$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

19.1 Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen. 

19.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow \pm\infty$. 

20 Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 1$ und der Definitionsmenge $D_f = [1; \infty[$.
Bestimmen Sie die Wertemenge von f . (Abitur 2022 Teil1) 

- 21.0 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer Exponentialfunktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. Der zugehörige Funktionsterm besitzt die Form $h(x) = e^{x+d} + y_0$ mit $d, y_0 \in \mathbb{R}$. (Abitur 2023 Teil 1)



- 21.1 Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung nachvollziehbar die Werte der Parameter d und y_0 . ☐

- 21.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen der Funktion h , ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist. Veranschaulichen Sie Ihre Überlegungen dazu in der Abbildung unter 21.0.

$$\int_{-1}^1 (2 - h(x)) dx > 0 \quad \text{☐}$$

- 22.0 Gegeben sind die Funktionen g und h durch die Funktionsgleichungen $g(x) = 2 \cdot e^x - 1$ und $h(x) = e^{2x}$ mit den Definitionsmengen $D_g = D_h = \mathbb{R}$. (Abitur 2024 Teil 1)

- 22.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des einzigen gemeinsamen Punktes P der Graphen der beiden Funktionen g und h . ☐

- 22.2 Der Graph der Funktion g wird an der x -Achse gespiegelt und anschließend um zwei Einheiten entlang der y -Achse nach oben verschoben. Der daraus entstandene neue Funktionsgraph gehört zur Funktion j .

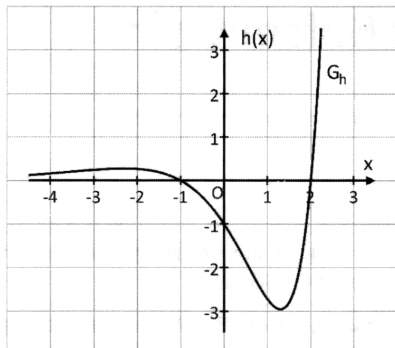
Geben Sie einen Funktionsterm der Funktion j an. ☐

- 23 Gegeben ist die Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(x) = x \cdot e^{x-2}$ und der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente G_t an den Graphen der Funktion h an der Stelle $x = 2$. (Abitur 2025 Teil 1) ☐

24.0 Gegeben ist ein Ausschnitt des Graphen G_h der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G_h mit den Koordinatenachsen haben ganzzahlige Werte und können der Abbildung entnommen werden. (Abitur 2025 AI)

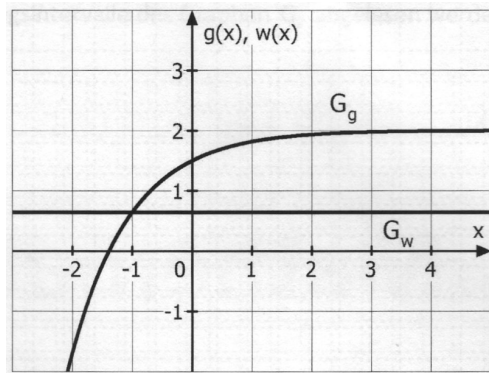


24.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a , b und c . 

24.2 Die Funktion H mit der Definitionsmenge $D_H = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von h .

Deuten Sie $|H(2) - H(0)| \approx 4,19$ geometrisch in Bezug auf G_h . 

25.0 Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = -0,5 \cdot e^{-x} + 2$ und der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des zugehörigen Graphen G_g sowie den Graphen G_w der konstanten Funktion $w: x \mapsto -0,5 \cdot e + 2$ mit der Definitionsmenge $D_w = \mathbb{R}$. (Abitur 2026 Teil 1)



25.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden G_t , die Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$ ist. 

25.2 Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes P der beiden Graphen der Funktionen g und w . 

25.3 Bestimmen Sie den Funktionsterm $G(x)$ der Stammfunktion von g , deren Graph die y -Achse bei 2 schneidet. 

- 26 Die Wertentwicklungen zweier Anlagen A und B werden für $t \in \mathbb{R}_0^+$ durch die folgenden Funktionen beschrieben:

$$K_A : t \mapsto 20000 \cdot 1,02^t \quad \text{und} \quad K_B : t \mapsto 30000 \cdot 0,98^t$$

Dabei steht die Variable t für die Zeit in Jahren ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$.

Die Funktionswerte von K_A bzw. K_B geben jeweils den Anlagewert in Euro zum Zeitpunkt t an.

Berechnen Sie auf eine Nachkommastelle gerundet, nach wie vielen Jahren die beiden Anlagen den gleichen Wert haben. (Abitur 2026 AI) 

- 27.0 In den vergangenen Jahren hatte der Befall von Bäumen durch den Eichenprozessionsspinner in Deutschland zunehmend auch gesundheitliche Auswirkungen auf die Bevölkerung. Aus diesem Grund wird in einem stark betroffenen Gebiet regelmäßig die momentane Anzahl der Patienten, deren Erkrankungen im Zusammenhang mit dem Eichenprozessionsspinner stehen, erfasst.

Anhand dieser Fallzahlen wird die momentane Anzahl der Patienten in einem Jahr mit starkem Befall durch den Eichenprozessionsspinner zwischen Anfang Mai und Ende Juli vereinfacht durch die reelle Funktion $P : t \rightarrow 200 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75}$ mit $t \in [0; 12]$ modelliert.

Dabei steht die Variable t für die vergangene Zeit in Wochen ab dem 1. Mai ($t_0 = 0$) des betrachteten Jahres. Der Funktionswert P gibt die momentane Anzahl der Patienten an. Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. (Abitur 2026 AI)

- 27.1 Berechnen Sie die nach dem Modell momentane Anzahl der Patienten nach elf Wochen (zum Zeitpunkt $t = 11$). 

- 27.2 Den erhobenen Fallzahlen ist zu entnehmen, dass im betrachteten Zeitraum die momentane Anzahl der Patienten nach vier Wochen mit ca. 620 ihr absolutes Maximum erreicht hat. Überprüfen Sie durch Rechnung, ob das verwendete Modell diese Daten annähernd widerspiegelt. 

(mögliches Teilergebnis: $\dot{P}(t) = 200 \cdot e^{-0,25 \cdot t + 0,75} (1 - 0,25t)$)

- 27.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion P im Bereich $0 \leq t \leq 12$ in ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie anschließend mithilfe des Graphen nachvollziehbar den Monat, in dem die momentane Anzahl der Patienten nach Erreichen des Maximalwertes erstmals wieder auf 500 gesunken ist. Wählen Sie auf beiden Achsen einen geeigneten Maßstab. 

- 27.4 An der Stelle $t_w = 8$ ändert der Graph der Funktion P sein Krümmungsverhalten von einer Rechts- in eine Linkskrümmung. Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang. Konkretisieren Sie Ihre Beschreibung mithilfe des Wertes $\dot{P}(8)$. 

28.0 In einem Labor wurde das Wachstum von Pflanzen aus neu gezüchtetem Saatgut unter Wassermangel untersucht. Die Höhe einer bestimmten Pflanze (in Zentimeter über der Pflanze) wird durch die Funktion H mit der Funktionsgleichung

$$H(t) = (5t^2 - 2) \cdot e^{-k \cdot t} \quad \text{mit } t \in [0; 14] \text{ und } k \in \mathbb{R}^+$$

modellhaft beschrieben. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Tagen ab dem Pflanzen des Samens ($t_0 = 0$). Negative Funktionswerte von H bedeuten in diesem Modell, dass sich die Pflanze noch in der Pflanze befindet.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle. (Abitur 2026 AII)

28.1 Berechnen Sie, in welcher Tiefe der Samen in die Pflanze eingesetzt wurde. ☐

28.2 Drei Tage nach der Aussaat beträgt die Höhe der Pflanze 9,6 cm über der Pflanze. Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass die Modellfunktion diesen Sachverhalt beschreibt. ☐

28.3.0 Im Folgenden gilt: $H(t) = (5t^2 - 2) \cdot e^{-0,5t}$

28.3.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Pflanze ihre maximale Höhe erreicht, sowie die maximale Höhe über der Pflanze. ☒

(mögliches Teilergebnis: $\dot{H}(t) = 2,5e^{-0,5t} \cdot (-t^2 + 4t + 0,4)$)

28.3.2 Bestimmen Sie die durchschnittliche Wachstumsrate der Pflanze in den ersten drei Tagen nach dem Pflanzen des Samens. ☒

28.3.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion H im Bereich $0 \leq t \leq 14$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. ☐

28.3.4 Ermitteln Sie mithilfe der Zeichnung aus 28.3.3 nachvollziehbar den Zeitraum, in welchem die Höhe der Pflanze über der Pflanze mindestens 75 % der maximalen Höhe beträgt. ☒

Lösungen

1.1

Symmetrieverhalten:

$$f(-x) = 2(-x) - 2(-x) \cdot e^{1-(-x)^2} = -2x + 2x \cdot e^{1-x^2} = -f(x)$$

$\Rightarrow$ der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Nullstellen: $f(x)=0$

$$\Rightarrow 2x - 2x \cdot e^{1-x^2} = 2x(1 - e^{1-x^2}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$1 - e^{1-x^2} = 0 \Rightarrow e^{1-x^2} = 1 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \quad x_3 = 1$$

1.2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \cdot e^{1-x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x^2-1}} = 0 \quad e\text{-Funktion überwiegt}$$

Die Gerade $y = 2x$ ist eine schiefe Asymptote des Graphen von f , da

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \cdot e^{1-x^2}) = 0$$

1.3

$$f'(x) = 2 - (2 \cdot e^{1-x^2} + 2x \cdot e^{1-x^2} \cdot (-2x)) = 2 - 2 \cdot e^{1-x^2} + 4x^2 \cdot e^{1-x^2}$$

$$f''(x) = -2 \cdot e^{1-x^2} \cdot (-2x) + (8x \cdot e^{1-x^2} + 4x^2 \cdot e^{1-x^2} \cdot (-2x)) = 4x \cdot e^{1-x^2} (1 + 2 - 2x^2) = 4x \cdot e^{1-x^2} (3 - 2x^2)$$

1.4

$$f''(x)=0 \Rightarrow x_1=0 \quad 3-2x^2=0 \Rightarrow x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}} \quad x_3=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Vorzeichenuntersuchung von $f''(x)$: e^{1-x^2} ist immer positiv

Vorzeichenverteilung von $4x \cdot (3-2x^2)$:

$\Rightarrow$ Der Graph von f ist linksgekrümmt in $\left[-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ sowie in $\left[0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

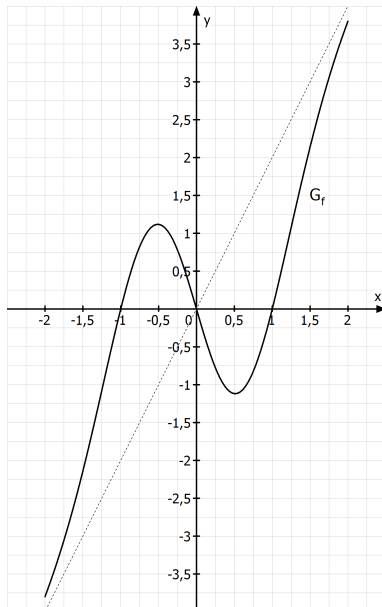
$\Rightarrow$ Der Graph von f ist rechtsgekrümmt in $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right]$ sowie in $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}; \infty\right]$

$\Rightarrow x_1=0, x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $x_3=\sqrt{\frac{3}{2}}$ sind Wendestellen

y-Koordinaten: $f(0)=0$ $WP_1(0/0)$; $f(-\sqrt{\frac{3}{2}}) \approx -0,96$ $WP_2(-1,22; -0,96)$

$WP_3(1,22 / 0,96)$ wegen Punktsymmetrie zum Ursprung

1.5 $f(2) \approx 3,80$



2.1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 \cdot e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0 \quad e\text{-Funktion überwiegt}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^{-x}) \text{ existiert nicht} \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow -\infty$$

$$\text{Nullstelle: } f(x)=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0 \text{ (dreifache Nullstelle)}$$

2.2

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = x^2 \cdot e^{-x} (3-x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 \cdot e^{-x} (3-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

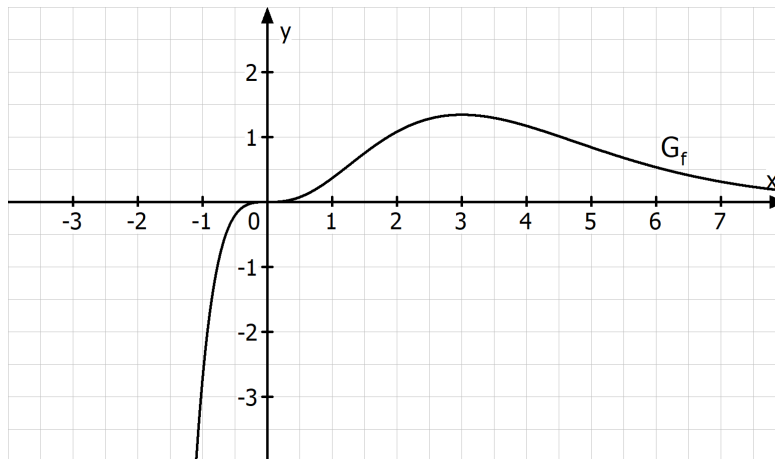
Vorzeichenuntersuchung von $f'(x)$: e^{-x} ist immer positiv

Vorzeichenverteilung von $x^2 \cdot (3-x)$:

$\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend in $]-\infty; 3]$ und f ist streng monoton fallend in $[3; \infty[$

$$\Rightarrow x=3 \text{ ist HP} \quad f(3) = 27 \cdot e^{-3} \approx 1,344 \Rightarrow \text{HP}(3; 1,344)$$

2.3



$a \leq 0$: genau eine Lösung

$0 < a < \frac{27}{e^3}$: zwei Lösungen

$a = \frac{27}{e^3}$: genau eine Lösung

$a > \frac{27}{e^3}$: keine Lösung

3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{4-x} - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{4-x} - 1) \text{ existiert nicht} \Rightarrow g(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow -\infty$$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$$\text{x-Achse: } e^{4-x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{4-x} = 1 \Rightarrow 4-x = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S_x(4/0)$$

$$\text{y-Achse: } y = e^{4-0} - 1 = e^4 - 1 \Rightarrow S_y(0/e^4 - 1)$$

Monotonieverhalten: $g'(x) = 0$

$$g'(x) = e^{4-x} \cdot (-1) \Rightarrow g'(x) \text{ ist für alle } x \in \mathbb{R} \text{ negativ}$$

$\Rightarrow g$ ist streng monoton abnehmend in ganz $\mathbb{R}$

4.1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 1) \cdot e^{-x+1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{x-1}} = 0 \quad \text{e-Funktion überwiegt}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 + 1) \cdot e^{-x+1}] \text{ existiert nicht} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow -\infty$$

4.2

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x+1} + (x^2 + 1) \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) = e^{-x+1}(2x - x^2 - 1) =$$

$$e^{-x+1} \cdot (-1) \cdot (x^2 - 2x + 1) = e^{-x+1} \cdot (-1) \cdot (x-1)^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x+1} \cdot (-1) \cdot (x-1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Vorzeichenuntersuchung von $f'(x)$: $e^{-x+1} \cdot (-1)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ negativ

Skizze von $(x-1)^2$:

$\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend in ganz $\mathbb{R}$ und besitzt deshalb keinen relativen Extrempunkt

$\Rightarrow x=1$ ist doppelte Nullstelle von $f'(x)$, d.h. einfache Nullstelle von $f''(x)$

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ bei $x=1 \Rightarrow$ TEP bei $x=1$

Wendepunkte: $f''(x)=0$

$$f''(x) = (-2x+2) \cdot e^{-x+1} + (-x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) = e^{-x+1}(-2x+2+x^2-2x+1) =$$

$$e^{-x+1}(x^2 - 4x + 3)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 3$$

Vorzeichenuntersuchung von $f''(x)$: e^{-x+1} ist immer positiv

Skizze von $x^2 - 4x + 3$:

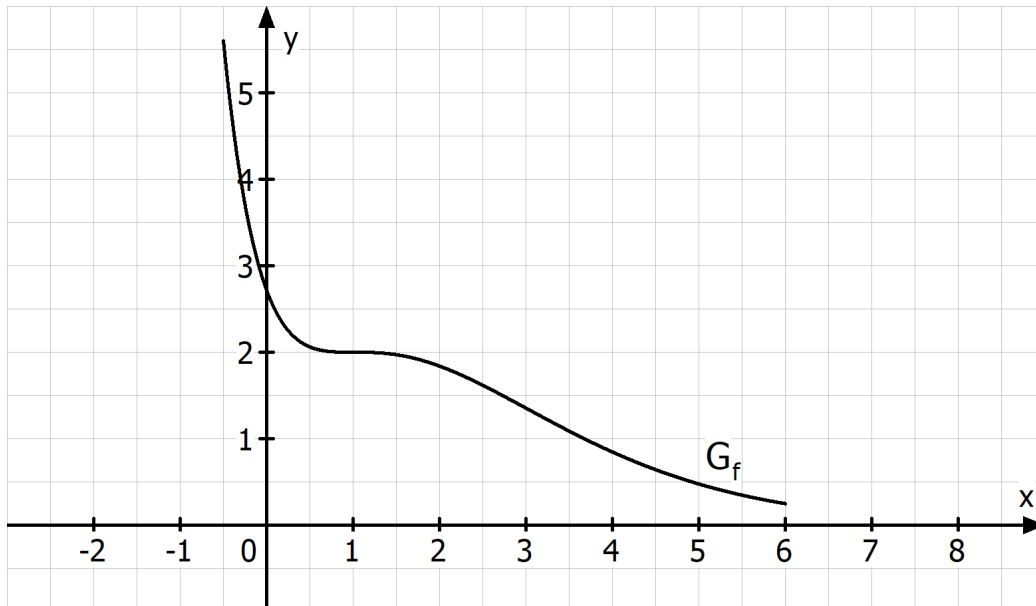
$\Rightarrow$ bei $x=1$ und $x=3$ wechselt jeweils das Vorzeichen von $f''(x)$

$\Rightarrow$ Wendepunkte bei $x=1$ und $x=3$ ($x=1$ ist sogar Terrassenpunkt)

$$f(1)=2 \Rightarrow \text{TEP}(1/2) \quad f(3)=10e^{-2} \Rightarrow \text{WP}(3/10e^{-2})$$

4.3

x	-0,5	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	5,60	2,72	2	1,84	1,35	0,85	0,48	0,25



5.1

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2,25 = 0$ ($e^{0,5x}$ immer positiv)
 $\Rightarrow x_1 = -1,5 \quad x_2 = 1,5$

Extrema:

$$f'(x) = 2xe^{0,5x} + (x^2 - 2,25)e^{0,5x} \cdot 0,5 = e^{0,5x}(0,5x^2 + 2x - 1,125)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0,5x^2 + 2x - 1,125 = 0 \Rightarrow x_1 = -4,5 \quad x_2 = 0,5$$

Skizze von f' : $e^{0,5x}$ immer positiv

Skizze von $0,5x^2 + 2x - 1,125$:

$$\Rightarrow x_1 = -4,5 \text{ HOP } \text{HOP}(-4,5/1,90) \quad x_2 = 0,5 \text{ TIP } \text{TIP}(0,5/-2,57)$$

5.2

$$f''(x) = e^{0,5x} \cdot 0,5 \cdot (x^2 + 2x - 1,125) + e^{0,5x} (2x + 2) = e^{0,5x} (0,5x^2 + 2x + 1,4375)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 0,5x^2 + 2x + 1,4375 = 0 \quad (\text{da } e^{0,5x} \text{ immer positiv})$$

$$\Rightarrow x_1 = -7,20 \quad x_2 = -0,80$$

Skizze von f'' : $e^{0,5x}$ immer positiv

Skizze von $0,5x^2 + 2x + 1,4375$:

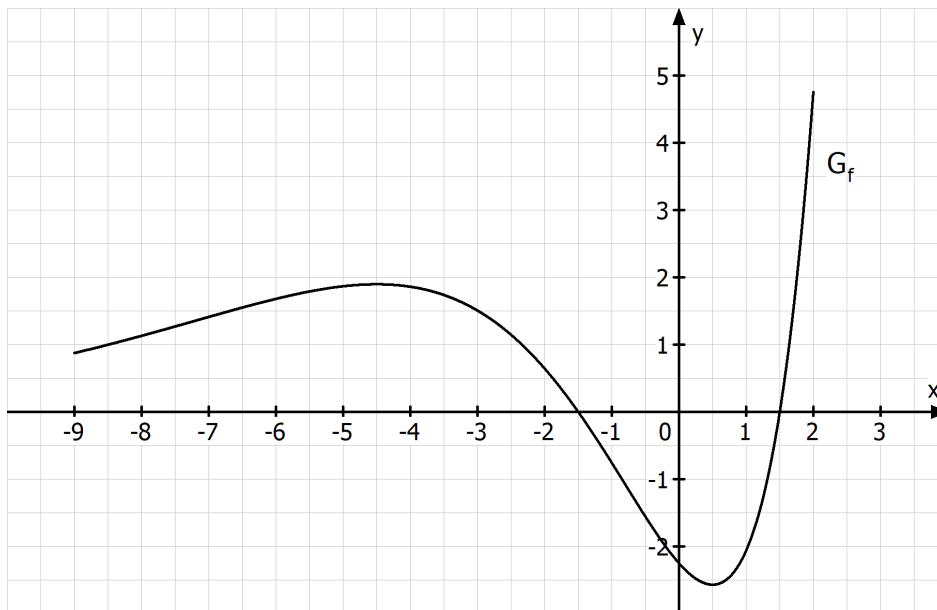
$$\Rightarrow x_1 = -7,20 \quad \text{WP} \quad \text{WP}(-7,20 / 1,35) \quad x_2 = -0,80 \quad \text{WP} \quad \text{WP}(-0,80 / -1,08)$$

5.3

$$x \rightarrow -\infty: (x^2 - 2,25)e^{0,5x} \rightarrow 0 \quad (\text{weil } e\text{-Funktion überwiegt})$$

$$x \rightarrow \infty: (x^2 - 2,25)e^{0,5x} \rightarrow \infty$$

5.4



6.1

Nullstellen: $f(x)=0 \Rightarrow x^2=0$ (e^{-2x+1} immer positiv) $\Rightarrow x=0$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 12x \cdot e^{-2x+1} + 6x^2 \cdot e^{-2x+1} \cdot (-2) = 12x \cdot e^{-2x+1} \cdot (1-x)$$

$$12x \cdot e^{-2x+1} \cdot (1-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$

Skizze von f' : e^{-2x+1} immer positiv

Skizze von $(12x - 12x^2)$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(0|0) \quad x_2 = 1 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(1|2,21)$$

6.2

$$f'(x) = 12e^{-2x+1} \cdot (x - x^2)$$

$$f''(x) = 12e^{-2x+1} \cdot (-2)(x - x^2) + 12e^{-2x+1} \cdot (1 - 2x) =$$

$$= 12e^{-2x+1} (2x^2 - 4x + 1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (\text{da } 12e^{-2x+1} \text{ immer positiv})$$

$$\Rightarrow x_1 = 1,71 \quad x_2 = 0,29$$

Skizze von f'' : $12e^{-2x+1}$ immer positiv

Skizze von $2x^2 - 4x + 1$:

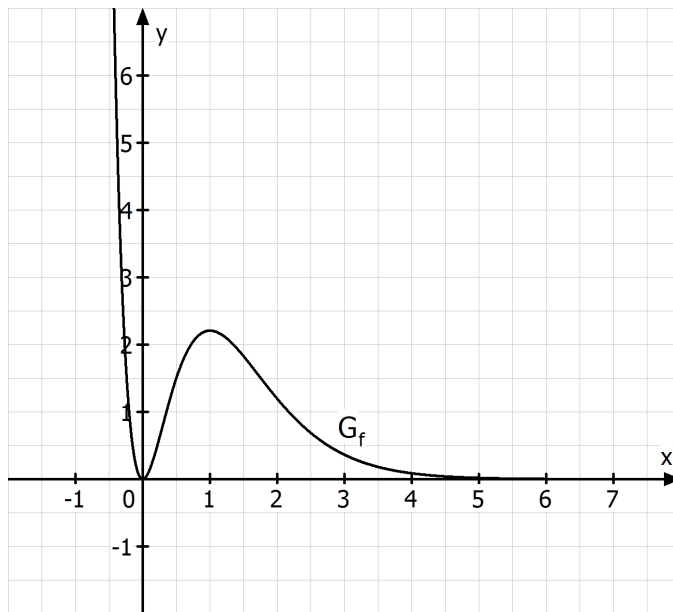
$$\Rightarrow x_1 = 1,71 \text{ WP} \quad \text{WP}(1,71/1,56) \quad x_2 = 0,29 \text{ WP} \quad \text{WP}(0,29/0,77)$$

6.3

$$x \rightarrow -\infty: 6x^2 \cdot e^{-2x+1} \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \infty: 6x^2 \cdot e^{-2x+1} \rightarrow 0 \quad (\text{weil } e\text{-Funktion überwiegt})$$

6.4



7.1

Nullstellen: $f(x) = e^x(-e^x + 4)$ $f(x) = 0 \Rightarrow -e^x + 4 = 0$ (e^x immer positiv)
 $\Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln(4)$

Extrema:

$$f'(x) = e^x(-e^x + 4) + e^x \cdot (-e^x) = e^x(-2e^x + 4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2e^x + 4 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$$

Skizze von f' : e^x immer positiv

Skizze von $-2e^x + 4$:

$$\Rightarrow x = \ln(2) \text{ HOP } \text{HOP}(0,69 / 4)$$

7.2

$$f''(x) = e^x(-2e^x + 4) + e^x \cdot (-2e^x) = e^x(-4e^x + 4)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -4e^x + 4 = 0 \text{ (da } e^x \text{ immer positiv)}$$

$$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Skizze von f'' : e^x immer positiv

Skizze von $-4e^x + 4$:

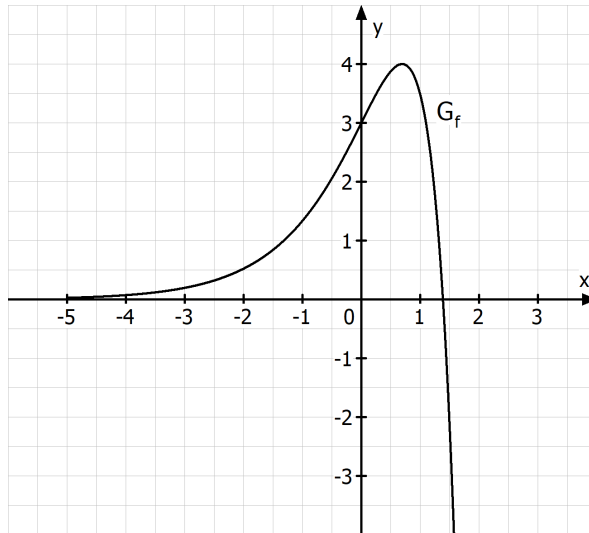
$$\Rightarrow x = 0 \text{ WP } \text{WP}(0 / 3)$$

7.3

$$x \rightarrow -\infty: -e^{2x} + 4e^x = e^x(-e^x + 4) \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \infty: e^x(-e^x + 4) \rightarrow -\infty$$

7.4



8.1

$$\text{Nullstellen: } f(x) = e^{-0,5x^2+x} - 1 \quad f(x) = 0 \Rightarrow e^{-0,5x^2+x} = 1$$

$$\Rightarrow -0,5x^2 + x = 0 \Rightarrow x(-0,5x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

Extrema:

$$f'(x) = e^{-0,5x^2+x} \cdot (-x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x+1 = 0 \Rightarrow x=1 \quad e^{-0,5x^2+x} \text{ immer positiv}$$

Skizze von f' : $e^{-0,5x^2+x}$ immer positiv

Skizze von $(-x+1)$:

$$\Rightarrow x=1 \text{ HOP } \text{HOP}(1|0,65)$$

8.2

$$f''(x) = e^{-0,5x^2+x} \cdot (-x+1) + e^{-0,5x^2+x} \cdot (-1) = e^{-0,5x^2+x} \cdot (-x)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{da } e^{-0,5x^2+x} \text{ immer positiv})$$

Skizze von f'' : $e^{-0,5x^2+x}$ immer positiv

Skizze von $(-x)$:

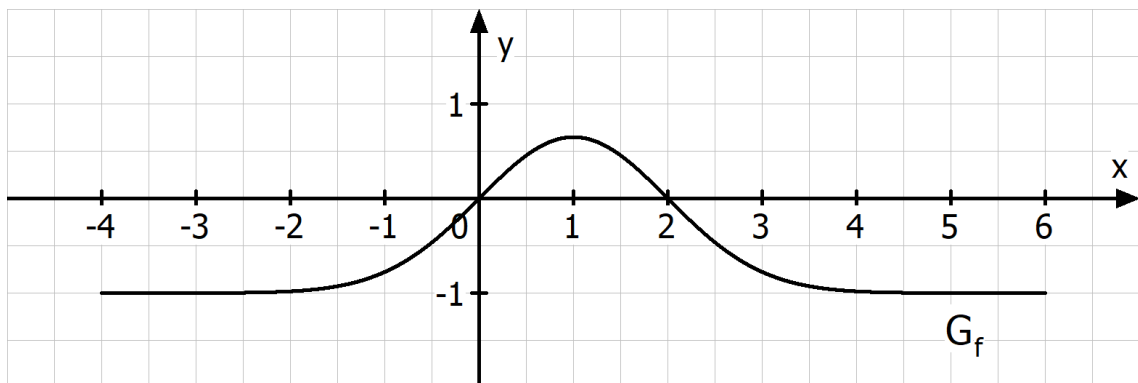
$$\Rightarrow x = 0 \text{ WP } \text{WP}(0|0)$$

8.3

$$x \rightarrow -\infty: e^{-0,5x^2+x} - 1 \rightarrow -1$$

$$x \rightarrow \infty: e^{-0,5x^2+x} - 1 \rightarrow -1$$

8.4



9 a) 1 b) 6 c) 3 d) 5 e) 4 f) 2

$$10.1 \quad g(-x) = e^{0,25(-x)} - e^{-0,25(-x)} = e^{-0,25x} - e^{0,25x} = -g(x)$$

G_g ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$$\int_{-2}^2 g(x) dx = 0$$

10.2

$$g'(x) = e^{0,25x} \cdot 0,25 - e^{-0,25x} \cdot (-0,25) = e^{0,25x} \cdot 0,25 + e^{-0,25x} \cdot 0,25$$

$$g'(0) = 0,5 \quad g(0) = 0$$

$$\Rightarrow t(x) = 0,5x$$

11.1

$$x^2 \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x^2 \cdot e^{-x} \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \infty \quad x^2 \cdot e^{-x} \rightarrow 0_+ \quad (\text{e-Funktion überwiegt})$$

11.2

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(2x - x^2)$$

$$e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

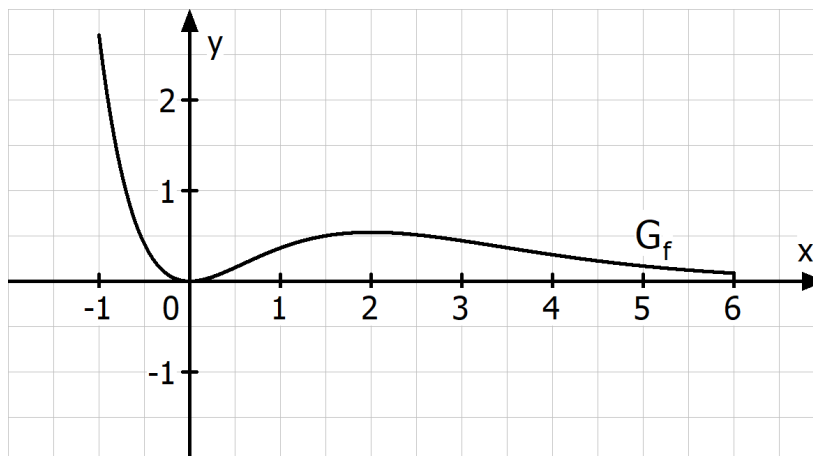
Skizze von f' : e^{-x} immer positiv

Skizze von $(2x - x^2)$:

$$\Rightarrow G_f \text{ smf in }]-\infty; 0] \text{ sowie in } [2; \infty[\quad G_f \text{ sms in } [0; 2]$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ TIP TIP}(0/0) \quad x = 2 \text{ HOP HOP}(2/4e^{-2})$$

11.3



12.1

t in Stunden	0	1	2	3	4
H(t) in Gramm	0,5	1	2	4	8

12.2

$$H(t) = 0,5 \cdot 2^t$$

13

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x - 1 > -1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

14.1

$$y\text{-Achse: } f(0) = 2 \cdot (0-2)^2 \cdot e^{-0,5 \cdot 0} = 8 \Rightarrow S_y(0|8)$$

$$x\text{-Achse: } f(x) = 0 \Rightarrow 2(x-2)^2 = 0 \text{ (} e^{-0,5x} \text{ immer positiv)} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow N(2|0)$$

$$x \rightarrow \infty \quad \underbrace{2(x-2)^2}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \text{ (weil die } e\text{-Funktion überwiegt)}$$

$$x \rightarrow -\infty \quad \underbrace{2(x-2)^2}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{\rightarrow \infty} \rightarrow \infty$$

14.2

$$f'(x) = 2 \cdot \left[(2x-4) \cdot e^{-0,5x} + (x^2-4x+4) \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) \right] =$$

$$= 2e^{-0,5x} \cdot (2x-4-0,5x^2+2x-2) = 2e^{-0,5x} \cdot (-0,5x^2+4x-6)$$

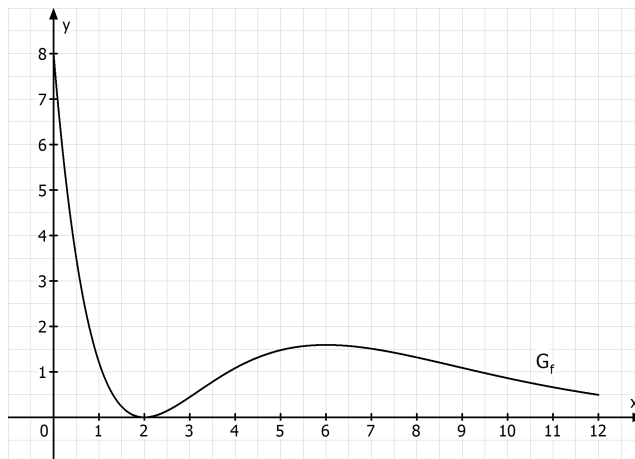
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -0,5x^2 + 4x - 6 = 0 \text{ (} 2e^{-0,5x} \text{ immer positiv)} \Rightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 2$$

Skizze von f' : $2e^{-0,5x}$ immer positiv

Skizze von $(-0,5x^2 + 4x - 6)$:

$$\Rightarrow x = 2 \text{ TIP} \quad \text{TIP}(2|0) \quad x = 6 \text{ HOP} \quad \text{HOP}(6|1,59)$$

14.3



Wendestellen befinden sich in I_2 und I_3 , da sich zwischen zwei Extrempunkten mindestens eine Wendestelle befinden muss und auch zwischen einem Hochpunkt und einer waagrechten Asymptote mindestens eine Wendestelle liegen muss.

15.1

$$f(-x) = [2 \cdot (-x)^2 - 4] \cdot e^{-0,5(-x)^2 - 1} = (2x^2 - 4) \cdot e^{-0,5x^2 - 1} = f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

$$x \rightarrow \infty \quad \underbrace{(2x^2 - 4)}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x^2 - 1}}_{\rightarrow 0^+} \rightarrow 0^+ \quad (\text{e-Funktion überwiegt})$$

$$x \rightarrow -\infty \quad \underbrace{(2x^2 - 4)}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x^2 - 1}}_{\rightarrow 0^+} \rightarrow 0^+$$

15.2

$$f'(x) = 4x \cdot e^{-0,5x^2 - 1} + (2x^2 - 4) \cdot e^{-0,5x^2 - 1} \cdot (-x) =$$

$$= e^{-0,5x^2 - 1} \cdot (4x - 2x^3 + 4x) = e^{-0,5x^2 - 1} \cdot (8x - 2x^3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 8x - 2x^3 = 0 \quad (e^{-0,5x^2 - 1} \text{ immer positiv})$$

$$\Rightarrow x(8 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$8 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_2 = -2 \quad x_3 = 2$$

Skizze von f' : $e^{-0,5x^2 - 1}$ immer positiv

Skizze von $(8x - 2x^3)$:

$$\Rightarrow x = -2 \text{ HOP HOP}(-2|0,2) \quad x = 0 \text{ TIP TIP}(0|-1,47) \quad x = 2 \text{ HOP HOP}(2|0,2)$$

$$\Rightarrow W_f = [-1,47; 0,2]$$

15.3

$$y = mx + t$$

$$m = f'(1) = (8 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3) \cdot e^{-0,5 \cdot 1^2 - 1} = 6e^{-1,5}$$

$$y = 6e^{-1,5} \cdot x + t \quad f(1) = (2 \cdot 1 - 4) \cdot e^{-0,5 \cdot 1^2 - 1} = -2e^{-1,5}$$

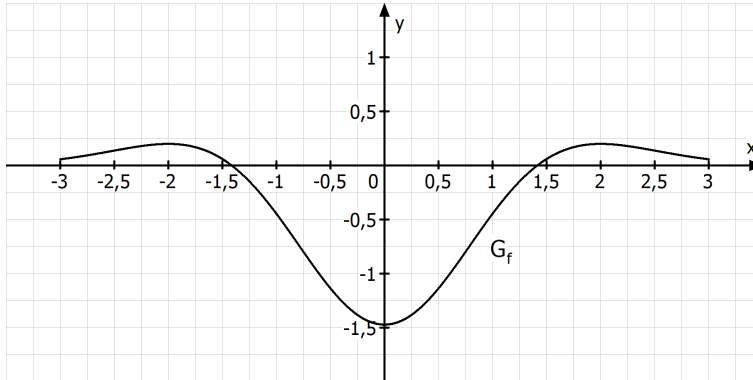
$$\Rightarrow -2e^{-1,5} = 6e^{-1,5} \cdot 1 + t \Rightarrow t = -8e^{-1,5}$$

$$\Rightarrow y = 6e^{-1,5} \cdot x - 8e^{-1,5}$$

15.4

$$f(x)=0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \quad \left(\text{da } e^{-0,5x^2-1} \text{ immer positiv} \right)$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = \sqrt{2}$$



15.5

$$\int_0^2 f'(x) dx = \left[(2x^2 - 4) \cdot e^{-0,5x^2-1} \right]_0^2 = 4e^{-3} - (-4e^{-1}) \approx 1,67$$

$$\Rightarrow A \approx 1,67$$

15.6 $A \approx \frac{2\sqrt{2}}{e} \approx 1,04$ z.B. durch Kästchen zählen

16.1

$$g(-x) = 2 - 5e^{-0,1(-x)^2} = 2 - 5e^{-0,1x^2} = g(x)$$

$\Rightarrow G_g$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

$$x \rightarrow +\infty \quad \underbrace{2 - 5e^{-0,1x^2}}_{\rightarrow 0^+} \rightarrow 2$$

$$x \rightarrow -\infty \quad \underbrace{2 - 5e^{-0,1x^2}}_{\rightarrow 0^+} \rightarrow 2$$

$\Rightarrow$ Asymptote: $y = 2$

16.2

$$2 - 5e^{-0,1x^2} = 0 \Rightarrow 5e^{-0,1x^2} = 2 \Rightarrow e^{-0,1x^2} = 0,4$$

$$\Rightarrow -0,1x^2 = \ln(0,4) \Rightarrow x^2 = \frac{\ln(0,4)}{-0,1} \approx 9,16 \Rightarrow x_1 \approx 3,03 \quad x_2 \approx -3,03$$

16.3

$$g'(x) = -5 \cdot e^{-0,1x^2} \cdot (-0,2x) = x \cdot e^{-0,1x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (e^{-0,1x^2} \text{ immer positiv})$$

Skizze von g' : $e^{-0,1x^2}$ immer positiv

Skizze von x :

$$\Rightarrow x = 0 \text{ TIP } \text{TIP}(0|-3)$$

$x = 0$ muss auch das absolute Minimum sein, weil keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens vorliegt.

$$\Rightarrow W_g = [-3; 2]$$

16.4

$$t: y = mx + t$$

$$m = g'(3) = 3e^{-0,9} \quad g(3) = 2 - 5e^{-0,9}$$

$$\Rightarrow 2 - 5e^{-0,9} = 3e^{-0,9} \cdot 3 + t \Rightarrow t = 2 - 14e^{-0,9}$$

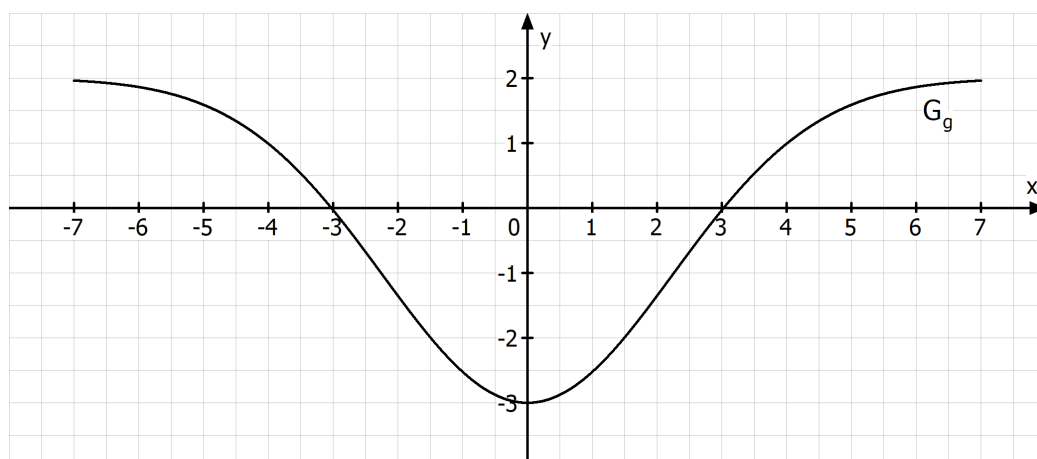
$$\Rightarrow t: y = 3e^{-0,9} \cdot x + 2 - 14e^{-0,9}$$

16.5

Weil G_g achsensymmetrisch zur y -Achse ist und g keine konstante Funktion ist, muss bei $x = 0$ ein Extrempunkt liegen (nach Angabe einziger Extrempunkt).

Wegen der Asymptote bei $y = 2$ und Nullstellen bei $x = \pm 3,03$, muss $x = 0$ ein TIP sein.

16.6



17

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot a^t \quad N_0 = 8 \cdot 10^{11} \\ \Rightarrow 4 \cdot 10^{11} &= 8 \cdot 10^{11} \cdot a^{50} \Rightarrow a^{50} = 0,5 \Rightarrow a = \sqrt[50]{0,5} \\ \Rightarrow N(t) &= 8 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt[50]{0,5}^t \end{aligned}$$

18.1

$$x \rightarrow +\infty \quad g(x) = 16 \cdot \underbrace{(1 - e^{-0,8x})}_{\rightarrow 1} + 4 \rightarrow 20$$

$\Rightarrow G_g$ hat eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 20$.

18.2

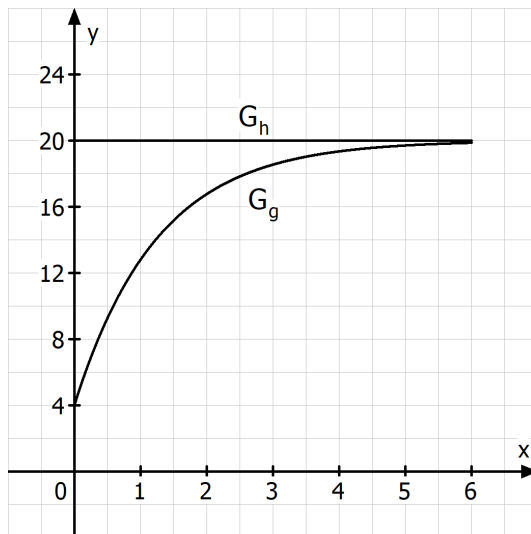
$$g'(x) = 16 \cdot (-e^{-0,8x} \cdot (-0,8)) = 12,8 \cdot e^{-0,8x}$$

$$12,8 \cdot \underbrace{e^{-0,8x}}_{>0} = 0 \quad \text{keine Nullstellen}$$

$$G_g \text{ ist sms in } [0; \infty[$$

$$g(0) = 4 \Rightarrow W_g = [4; 20[$$

18.3



18.4

$$20 - [16 \cdot (1 - e^{-0,8x}) + 4] \leq 0,5 \Rightarrow 20 - 16 + 16 \cdot e^{-0,8x} - 4 \leq 0,5$$

$$\Rightarrow 16 \cdot e^{-0,8x} \leq 0,5 \Rightarrow e^{-0,8x} \leq \frac{1}{32} \Rightarrow -0,8x \leq \ln\left(\frac{1}{32}\right) \Rightarrow x \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{32}\right)}{-0,8} \approx 4,33$$

$$18.5 \quad A = \int_0^4 (16 \cdot e^{-0,8x}) dx = \left[-20 \cdot e^{-0,8x} \right]_0^4 = -20 \cdot e^{-3,2} - (-20) \approx 19,18$$

19.1

SP mit y-Achse: $f(0) = 2e^1 - 1 \quad S_y(0 | 2e - 1)$

SP mit x-Achse: $2e^{\frac{1}{2}x+1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}x+1 = \ln(0,5)$
 $-\frac{1}{2}x = \ln(0,5) - 1 \Rightarrow x = -2\ln(0,5) + 2 \quad N(-2\ln(0,5) + 2 | 0)$

19.2

$x \rightarrow -\infty \quad 2e^{\frac{1}{2}x+1} - 1 \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow +\infty \quad 2e^{\frac{1}{2}x+1} - 1 \rightarrow -1$

20

$f'(x) = 2 \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) = -2 \cdot e^{-x+1}$

$f'(x) < 0$ für $x \in [1; \infty[\Rightarrow G_f$ smf in $[1; \infty[$

$f(1) = 2 \cdot e^{-1+1} - 1 = 1 \quad x \rightarrow \infty \quad 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x+1} - 1 \rightarrow -1$

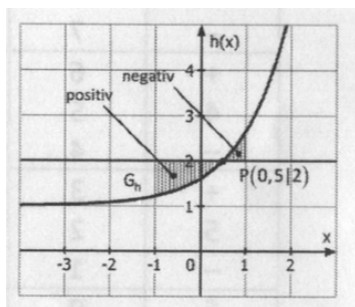
$\Rightarrow W_f =]-1; 1]$

21.1

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow h(x) \rightarrow 1 \Rightarrow y_0 = 1$

$P(0,5 | 2) \in G_h \Rightarrow e^{0,5+d} + 1 = 2 \Rightarrow e^{0,5+d} = 1 \Rightarrow 0,5+d = 0 \Rightarrow d = -0,5$

21.2 $A_1 > A_2 \Rightarrow$ positive Flächenbilanz $\Rightarrow$ wahre Aussage



22.1

$2e^x - 1 = e^{2x} \Rightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

Substitution: $x = e^x$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$

$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P(0 | 1)$

$$22.2 \quad 2e^x - 1 \xrightarrow{\text{Spiegelung an der x-Achse}} -(2e^x - 1) = -2e^x + 1 \xrightarrow{\text{Verschiebung um 2 in y-Richtung}} j(x) = -2e^x + 3$$

23

$$h'(x) = e^{x-2} + x \cdot e^{x-2}$$

$$m = h'(2) = 1 + 2 = 3 \quad h(2) = 2$$

$$y = mx + t \Rightarrow 2 = 3 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -4 \Rightarrow y = 3x - 4$$

24.1

$$(I) \quad h(0) = -1 \Rightarrow c \cdot e^0 = -1 \Rightarrow c = -1$$

$$(II) \quad h(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0 \quad (e^{-1} > 0) \Rightarrow a - b - 1 = 0$$

$$(III) \quad h(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \quad (e^2 > 0) \Rightarrow 4a + 2b - 1 = 0$$

$$(II) \Rightarrow a = b + 1$$

$$(III) \Rightarrow 4(b + 1) + 2b - 1 = 0 \Rightarrow 6b + 3 = 0 \Rightarrow b = -0,5$$

$$\Rightarrow a = -0,5 + 1 \Rightarrow a = 0,5$$

24.2 Maßzahl der Fläche, die der Graph mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten einschließt.

25.1

$$g(x) = -0,5 \cdot e^{-x} + 2 \quad g'(x) = -0,5 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 0,5 \cdot e^{-x}$$

$$t: y = mx + t$$

$$m = g'(0) = 0,5$$

$$Q(0|y_Q) \quad y_Q = g(0) = 1,5 \Rightarrow Q(0|1,5)$$

$$\Rightarrow 1,5 = 0,5 \cdot 0 + t \Rightarrow t = 1,5$$

$$\Rightarrow t: y = 0,5x + 1,5$$

25.2

$$-0,5e^{-x} + 2 = -0,5e + 2 \Rightarrow -0,5e^{-x} = -0,5e \Rightarrow e^{-x} = e$$

$$\Rightarrow -x = \ln(e) = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow P(-1|-0,5e + 2)$$

25.3

$$G(x) = 0,5e^{-x} + 2x + C$$

$$R(0|2) \Rightarrow 2 = 0,5e^{-0} + 2 \cdot 0 + C \Rightarrow 2 = 0,5 + C \Rightarrow C = 1,5$$

$$\Rightarrow G(x) = 0,5e^{-x} + 2x + 1,5$$

26

$$20000 \cdot 1,02^t = 30000 \cdot 0,98^t \Rightarrow 1,02^t = 1,5 \cdot 0,98^t \Rightarrow \left(\frac{51}{49}\right)^t = 1,5$$

$$\Rightarrow t = \log_{\frac{51}{49}}(1,5) \approx 10,1$$

Nach ca. 10,1 Jahren haben beide Anlagen den gleichen Wert.

27.1

$$P(11) \approx 298$$

Nach elf Wochen beträgt die momentane Anzahl an Patienten 298.

27.2

$$P'(t) = 200 \cdot e^{-0,25t+0,75} + 200t \cdot e^{-0,25t+0,75} \cdot (-0,25) = 200e^{-0,25t+0,75} (1 - 0,25t)$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0,25t = 0 \Rightarrow t = 4 \quad 200e^{-0,25t+0,75} \text{ immer positiv}$$

Skizze von P' : $200e^{-0,25t+0,75}$ immer positiv

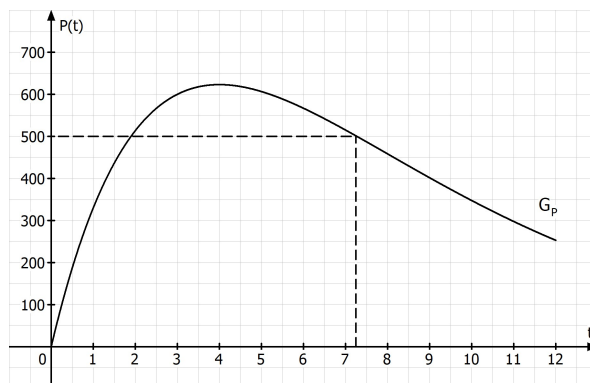
$$\Rightarrow t = 4 \text{ Maximum}$$

Da in D_p nur ein Monotoniewechsel vorhanden ist, ist $t = 4$ auch das absolute Maximum.

$$P(4) \approx 623$$

Das Modell spiegelt die Fallzahlen gut wider.

27.3



$$t \approx 7,25 \Rightarrow \text{Juni}$$

27.4

$$\dot{P}(8) \approx -57,3$$

Zum Zeitpunkt $t = 8$ Wochen ist die Abnahmegeschwindigkeit der Anzahl der Patienten mit ca. 57,3 pro Woche am größten.

28.1

$$H(0) = (5 \cdot 0^2 - 2)e^{-k \cdot 0} = -2$$

Der Samen wurde in 2 cm Tiefe eingesetzt.

28.2

$$H(3) = 9,6$$

$$\Rightarrow (5 \cdot 3^2 - 2)e^{-k \cdot 3} = 9,6 \Rightarrow 43e^{-3k} = 9,6 \Rightarrow e^{-3k} = \frac{48}{215}$$

$$\Rightarrow -3k = \ln\left(\frac{48}{215}\right) \Rightarrow k = -\frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{48}{215}\right) \approx 0,5$$

28.3.1

$$H'(t) = 10t \cdot e^{-0,5t} + (5t^2 - 2) \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = e^{-0,5t} (10t - 2,5t^2 + 1)$$

$$H'(t) = 0 \quad e^{-0,5t} \text{ immer positiv}$$

$$\Rightarrow -2,5t^2 + 10t + 1 = 0 \Rightarrow -t^2 + 4t + 0,4 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot 0,4}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{17,6}}{-2}$$

$$\Rightarrow t_1 \approx 4,1 \quad (t_2 \approx -0,1) \notin D_H$$

Skizze von H' : $2,5e^{-0,5t}$ immer positiv

Skizze von $(-t^2 + 4t + 0,4)$:

$$\Rightarrow t = 4,1 \text{ Maximum}$$

Da in D_H nur ein Monotoniewechsel vorhanden ist, ist $t = 4,1$ auch das absolute Maximum.

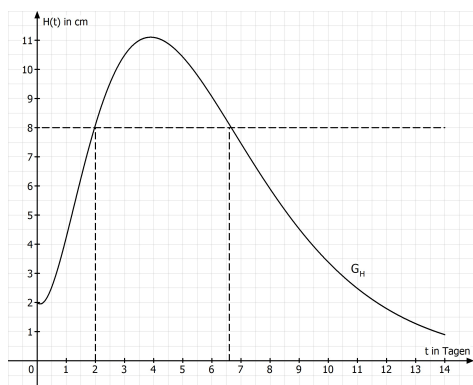
$$H(4,1) \approx 10,6$$

Nach 4,1 Tagen erreicht die Pflanze ihre maximal größte Höhe von 10,6 cm.

28.3.2

$$\frac{H(3) - H(0)}{3 - 0} = \frac{9,6 - (-2)}{3} \approx 3,9 \text{ cm pro Tag}$$

28.3.3



28.3.4

$$0,75 \cdot 10,6 \approx 8 \text{ cm}$$

Aus der Zeichnung von 28.3.3 folgt:

Der Zeitraum, in dem die Höhe der Pflanze über der Erde mindestens 8 cm beträgt, ist $6,6 - 2 = 4,6$ Tage.